Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y=-\frac{1}{4}\left(x^{3}-3x^{2}+4\right)$$

Решение.

1) Область определения функции – вся числовая прямая, то есть $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=-\frac{1}{4}\left(x^{3}-3x^{2}+4\right)=0,\ \Rightarrow x_{1}=-1,\ x_{2}=2$, точки (-1,0), (2,0).

Oy: $x=0,\Rightarrow y=-\frac{1}{4}(0-0+4)=-1$. Точка (0, -1).

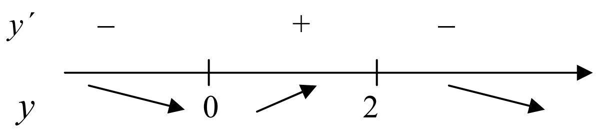
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=-\frac{1}{4}\left((-x)^{3}-3(-x)^{2}+4\right)=-\frac{1}{4}\left(-x^{3}-3x^{2}+4\right)\neq\pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(-\frac{1}{4}\left(x^{3}-3x^{2}+4\right)\right)'=-\frac{1}{4}\left(3x^{2}-6x\right)=-\frac{3}{4}x(x-2)=0$$

Находим критические точки: $x_{1}=0,\ x_{2}=2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

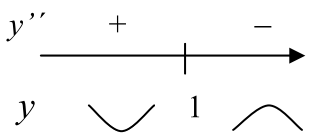


Функция убывает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$, возрастает на интервале $(0;2)$. Функция имеет минимум в точке $x=0$, $y(0)=-1$, функция имеет максимум в точке $x=2$, $y(2)=0$

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(-\frac{1}{4}\left(3x^{2}-6x\right)\right)'=-\frac{1}{4}(6x-6)=-\frac{3}{2}(x-1)=0.$$

Находим критические точки: $x=1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервале $(1;+\infty)$, выпукла вниз на интервале $(-\infty;1)$. Точка перегиба: $x=1$, $y(1)=-0,5$.

6) Асимптоты.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-3x^2+4}{x}\right)=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-3x+4/x\right)=-\infty$, асимптот нет.

7) Строим график функции, отметим ключевые точки: