Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Решение.

1) Область определения функции $x \neq \pm 1$, то есть $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Точки разрыва $x = 1$ и $x = -1$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Получаем, что $x = 1$ и $x = -1$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y = \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0$, $x = 0$, точка (0,0).

Oy: $x = 0$, $\Rightarrow y = 0$, точка (0,0).

3) Функция нечетная, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -y(x)$$

График симметричен относительно начала координат.

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-3)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2}.$$

Находим критические точки: $x = \pm\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \pm 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

y'	+		–		–		–		–		+
y	↗	$-\sqrt{3}$	↘	-1	↘	0	↘	1	↘	$\sqrt{3}$	↗

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3}),\ (\sqrt{3};+\infty)$, убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right), \left(-1;0\right), \left(0;1\right), \left(1;\sqrt{3}\right)$. Функция имеет минимум при $x = \sqrt{3} \approx 1,73$,

$y(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2,6$. Функция имеет максимум при $x = -\sqrt{3} \approx -1,73$,

$y(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = -2,6$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

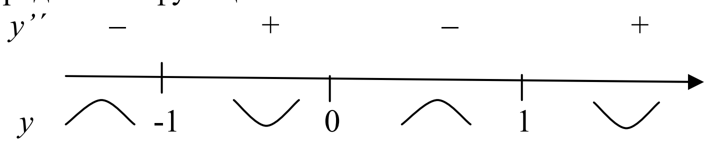
$$y''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)2x2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=x\frac{\left(4x^2-6\right)\left(x^2-1\right)-4\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=x\frac{4x^4-6x^2-4x^2+6-4x^4+12x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=,$$

$$=x\frac{6+2x^2}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Приравниваем к нулю и находим критические точки: $x=0,\ x=1,\ x=-1$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;-1)$, $(0;1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1;0)$, $(1;+\infty)$. Точка перегиба: $x=0$, $f(0)=0$.

6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-1/x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x^2-1)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-1/x)}=0.$$

Наклонная асимптота $y=x$.

7) Строим график функции и асимптоту, отмечая ключевые точки: