Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y=\frac{x^3}{2(x+5)^2}$$

Решение.

Пункт 1. Область определения. Функция определена для всех x кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль: $x=-5$, то есть $D(y)=(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$.

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to-5\pm0} y=\lim_{x\to-5\pm0}\frac{x^3}{2(x+5)^2}=\frac{-125}{2(+0)}=-\infty\ ,$$

то есть $x=-5$ - двусторонняя вертикальная асимптота.

Пункт 2. Точки пересечения с осями координат:

Ось Ox: $y=\dfrac{x^3}{2(x+5)^2}=0$, $\Rightarrow x=0$, точка (0,0).

Ось Oy, $x=0\Rightarrow\ y=0$, точка (0,0).

Пункт 3. Функция общего вида, так как

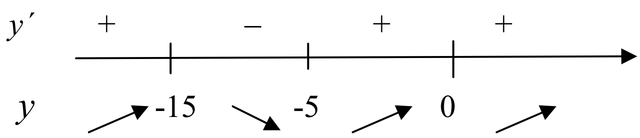
$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x+5)^2}=-\frac{x^3}{2(-x+5)^2}\neq y(x).$$

Пункт 4. Экстремумы и монотонность.
Вычисляем производную функции:

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x+5)^2}\right)'=\frac{3x^2(x+5)^2-2x^3(x+5)}{2(x+5)^4}=\frac{3x^2(x+5)-2x^3}{2(x+5)^3}=\frac{3x^3+15x^2-2x^3}{2(x+5)^3}=$$

$$=\frac{x^3+15x^2}{2(x+5)^3}=\frac{x^2(x+15)}{2(x+5)^3}.$$

Критические точки: $x_1=0, x_2=-15, x_3=-5$.



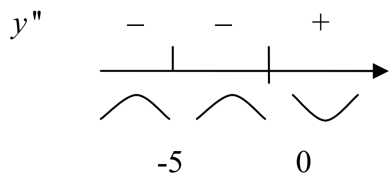
Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-15)$, $(-5;0)$, $(0;+\infty)$, убывает на интервале $(-15;-5)$. Функция имеет максимум при $x=-15$, $y(-15)=-\dfrac{135}{8}=-16{,}875$.

Пункт 5. Выпуклость и точки перегиба.
Вычислим вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^3 + 15x^2}{2(x+5)^3} \right)' = \frac{(3x^2 + 30x)(x+5)^3 - 3(x^3 + 15x^2)(x+5)^2}{2(x+5)^6} = \frac{(3x^2 + 30x)(x+5) - 3(x^3 + 15x^2)}{2(x+4)^4} =$$

$$= \frac{3x^3 + 15x^2 + 30x^2 + 150x - 3x^3 - 45x^2}{2(x+5)^4} = \frac{150x}{(x+5)^4}.$$

Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty; -5)$, $(-5; 0)$, выпукла вниз на интервале $(0; +\infty)$, точка перегиба $(0; 0)$.

Пункт 6. Наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

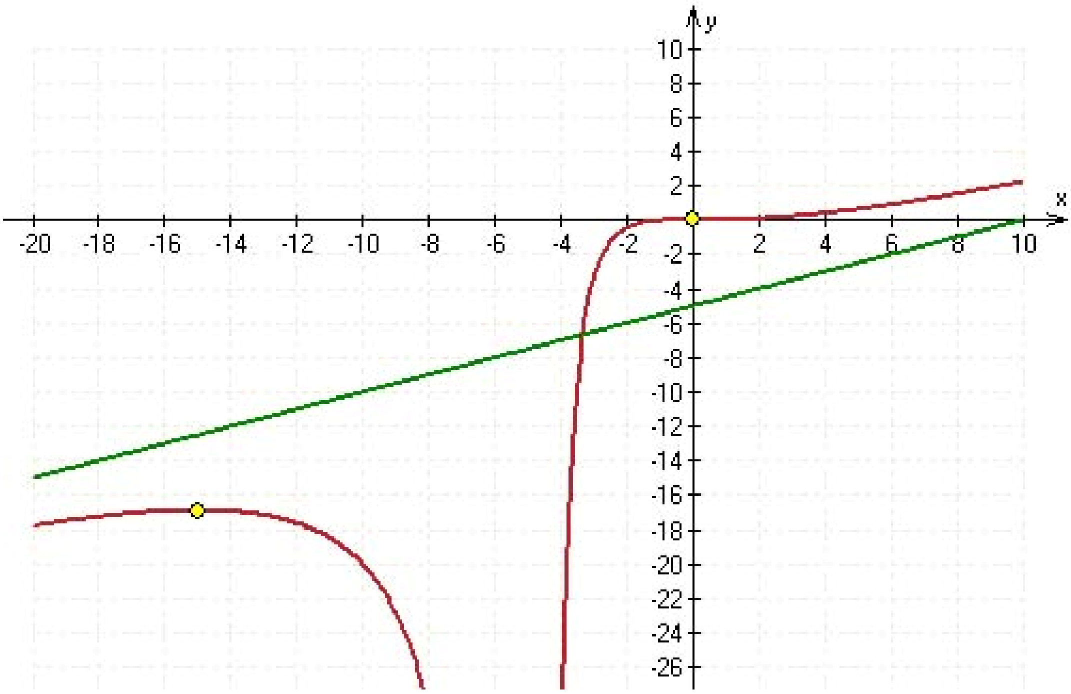
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+5)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(1+5/x)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+5)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x(x+5)^2}{2(x+5)^2} \right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 - 10x^2 - 25x}{2(x+5)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-10x^2 - 25x}{2(x+5)^2} \right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-10 - 25/x}{2(1+5/x)^2} \right) = -5.$$

Таким образом, наклонная асимптота $y = \frac{1}{2}x - 5$.

Пункт 7. Строим график функции и наклонной асимптоты, отмечаем важные точки:


y
x
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
-26
-20
-18
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10