*Исследовать функцию и построить график.*

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$$

**Решение.**

1) Область определения функции $x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Точка разрыва $x = 0$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{x^3 - 1}{4x^2} = \frac{-1}{+0} = -\infty.$$

Получаем, что $x = 0$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

$Ox$ : $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2} = 0$, $x = 1$, точка (1,0).

$Oy$ : $x = 0 \notin D(y)$.

3) Функция общего вида, так как

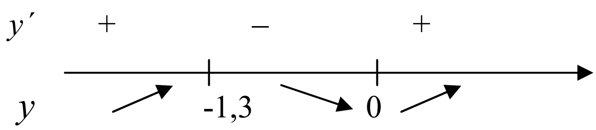
$$y(-x) = \frac{(-x)^3 - 1}{4(-x)^2} = -\frac{x^3 + 1}{4x^2} \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{4x^2}\right)' = \frac{1}{4}\frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{4}\frac{3x^4 - 2x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^4 + 2x}{4x^4} = \frac{x^3 + 2}{4x^3}$$

Находим критические точки: $x_1 = -\sqrt[3]{2} \approx -1,3$, $x_2 = 0$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.




Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1,3), (0; +\infty)$, убывает на интервале $(-1,3; 0)$.
В точке $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,3$ функция имеет максимум, $y(-1,3) \approx -0,47.$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$y''(x) = \left(\dfrac{x^3 + 2}{4x^3}\right)' = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2x^3}\right)' = -\dfrac{3}{2x^4} < 0$, на каждом интервале области определения,

поэтому функция выпукла вверх на каждом интервале области определения, точек перегиба нет.

6) Наклонные асимптоты вида $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{4x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^2}-\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1-x^3}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2} = 0$$

Наклонная асимптота $y = \frac{1}{4}x$.

7) Строим график функции и асимптоту, отметим важные точки: