Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y=\frac{e^x}{x}$$

Решение.

1) Область определения функции: $x\neq 0$, то есть $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Вычислим односторонние пределы в $x=0$:

$$\lim_{x\to -0}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{-0}=-\infty,\ \lim_{x\to +0}\frac{e^x}{x}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Таким образом, $x=0$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=\dfrac{e^x}{x}=0,$ нет решений.

Oy: $x=0\notin D(y)$.

Нет точек пересечения с осями координат.

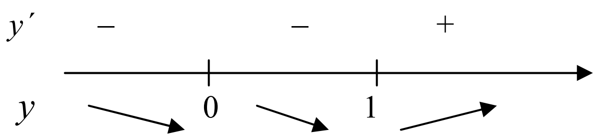
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\frac{e^{-x}}{-x}=-\frac{e^{-x}}{x}\neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Находим критические точки: $x_1=0,\ x_2=1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

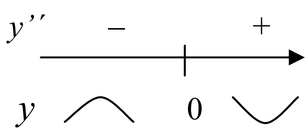


Функция убывает на интервалах $(-\infty;0),(0;1)$, возрастает на интервале $(1;+\infty)$. Функция имеет минимум в точке $x=1$, $y(1)=e\approx 2{,}7$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)'=\frac{e^x(x-1+1)x^2-e^x(x-1)2x}{x^4}=e^x\,\frac{(x)x-(x-1)2}{x^3}=e^x\,\frac{x^2-2x+2}{x^3}.$$

Находим критические точки: $x=0$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(0;+\infty)$, выпукла вверх на интервале $(-\infty;0)$. Точек перегиба нет.

6) Асимптоты.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=\infty,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2}=0,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1}=0.$$

Получили горизонтальную асимптоту $y=0$ (ось абсцисс) при $x\to-\infty$.

7) Строим график функции, отметим локальный минимум: